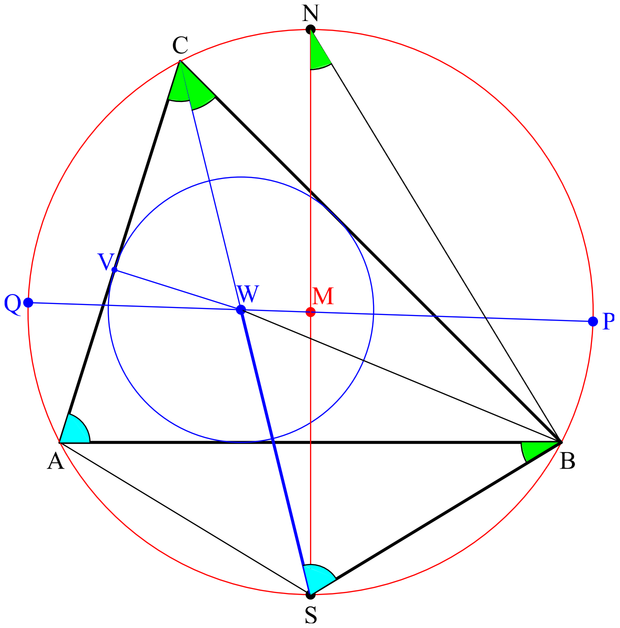
Jörg MEYER, Hameln Juli 2021

Zum Abstand zwischen Um- und Berührkreismitte



Der Umkreis um M hat Radius R, der Inkreis um W hat Radius ρ. Es sei $WM = d$. Die Gerade durch M und W schneidet den Umkreis in P und Q. Nach dem Satz vom Südpol schneiden sich die Winkelhalbierende CW und die Mittelsenkrechte MS in S auf dem Umkreis.

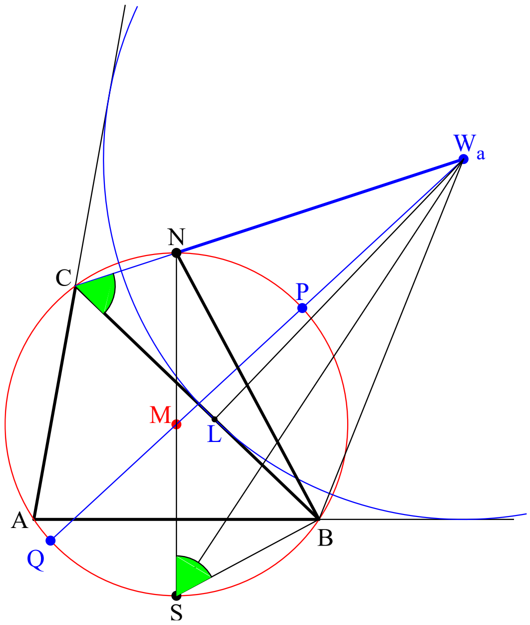
Der Nordpol N ist Spiegelbild von S an M.

Es ist $QW \cdot WQ = (R-d)\cdot(R+d) = CW \cdot WS$ aufgrund des Sehnensatzes. Nun ist $WS = SB$, denn: Gleichgefärbte Winkel haben aufgrund des Umfangswinkelsatzes gleiche Größe; die grünen haben die Größe γ/2, die cyanfarbigen haben die Größe α. Wegen

$\sphericalangle SBW = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ist $\sphericalangle BWS = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Daher ist $WS = SB$ und folglich $R^2 - d^2 = CW \cdot SB$. Der Inkreis berührt AC in V. Die Dreiecke VWC und SBN sind zueinander ähnlich, denn SN ist Durchmesser des Umkreises, so dass der Winkel SBN nach Thales recht ist. Also ist $\frac{VW}{CW} = \frac{SB}{SN}$ bzw. $\frac{\rho}{CW} = \frac{SB}{2 \cdot R}$ und daher $R^2 - d^2 = 2 \cdot R \cdot \rho$ und somit

$\boxed{d^2 = R\cdot(R - 2\cdot\rho)}$ oder $\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d}}$.



Der Umkreis um M hat Radius R, der Ankreis um W_a hat Radius ρ_a. Es sei $W_aM = d_a$. Die Gerade durch M und W_a schneidet den Umkreis in P und Q.

Analog zum Satz vom Südpol beweist man den Satz vom Nordpol, wonach der Schnittpunkt N zwischen der Mittelsenkrechten zu AB und der Außen-Winkelhalbierenden durch C auf dem Umkreis liegt.

Der Südpol S ist Spiegelbild von N an M.

Es ist $W_aQ \cdot W_aP = (d_a + R)\cdot(d_a - R) = W_aC \cdot W_aN$

aufgrund des Sehnensatzes. Es ist $\sphericalangle BW_aN = \frac{\beta+\gamma}{2}$,

und wegen $\sphericalangle BNC = 180° - \alpha$ ist $\measuredangle W_aNB = \alpha$. Daher

ist $\sphericalangle NBW_a = 180° - \alpha - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2} = \sphericalangle BW_aN$.

Somit ist $W_aN = BN$ und folglich $d_a^2 - R^2 = W_aC \cdot BN$.

Der Ankreis berührt BC in L.

Nach dem Umfangswinkelsatz haben die grün markierten Winkel gleiche Größe. Der Winkel SBN ist nach Thales recht. Daher sind die Dreiecke NSB und CLW_a zueinander ähnlich, was zu $\frac{W_aC}{2\cdot R} = \frac{\rho_a}{NB}$ und

daher zu $\boxed{d_a^2 = R\cdot(R + 2\cdot\rho_a)}$ oder $\boxed{\frac{1}{\rho_a} = \frac{1}{d_a - R} - \frac{1}{d_a + R}}$ führt.