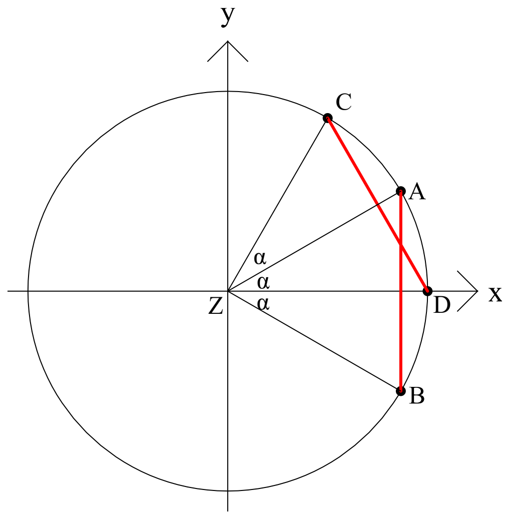
Jörg MEYER, Hameln

Doppelwinkelformeln und Additionstheoreme in der Sek I



In der Skizze sind mit

$$D=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}\cos(2\cdot\alpha)\\\sin(2\cdot\alpha)\end{pmatrix}$$

die roten Strecken gleich lang, da sie beide zum Mittelpunktswinkel $2\cdot\alpha$ gehören.
Es ist $|AB|=2\cdot\sin\alpha$ und

$$|CD|=\sqrt{(1-\cos(2\cdot\alpha))^2+\sin^2(2\cdot\alpha)}\ ,$$

also

$$1-2\cdot\cos(2\cdot\alpha)+\underbrace{\cos^2(2\cdot\alpha)+\sin^2(2\cdot\alpha)}_{1}=4\cdot\sin^2\alpha$$

$$1-\cos(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin^2\alpha$$

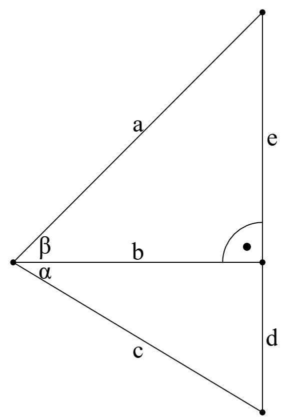
und deshalb

$$\boxed{\cos(2\cdot\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\ .$$

Auch der Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(2\cdot\alpha)$ des Dreiecks ZDC ist gleich dem Flächeninhalt $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ des Dreiecks ZBA, und daraus folgt

$$\boxed{\sin(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\ .$$

Die *Additionstheoreme*[1] sieht man für $0°<\alpha+\beta<90°$ so ein:



Das große Dreieck hat den Flächenhalt

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(\alpha+\beta)=\frac{b\cdot e}{2}+\frac{b\cdot d}{2}\ ,$$

also ist

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{b}{c}\cdot\frac{e}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha\ .$$

Nach dem Cosinussatz ist

$$(e+d)^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta)=a^2+c^2-e^2-2\cdot e\cdot d-d^2$$

$$a\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta)=b^2-e\cdot d$$

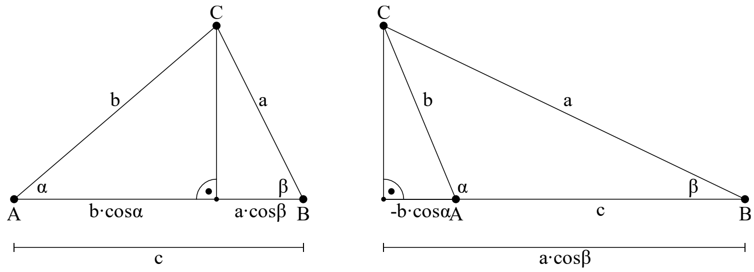
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}-\frac{e}{a}\cdot\frac{d}{c}=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

[1] Pargeter in Math. Gaz. Vol. 80, No. 487 (Mar. 1996), pp. 235-236.

Alernativ kann man auch folgendermaßen vorgehen:
Es gilt der Projektionssatz

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$$

(Man beachte, dass im Bild ganz rechts $\cos\alpha < 0$ ist!)



Daher ist aufgrund des Sinussatzes $\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$, und wegen $\sin\gamma = \sin\left(180° - \left(\alpha + \beta\right)\right) = \sin\left(\alpha + \beta\right)$ hat man das Additionstheorem für den Sinus.