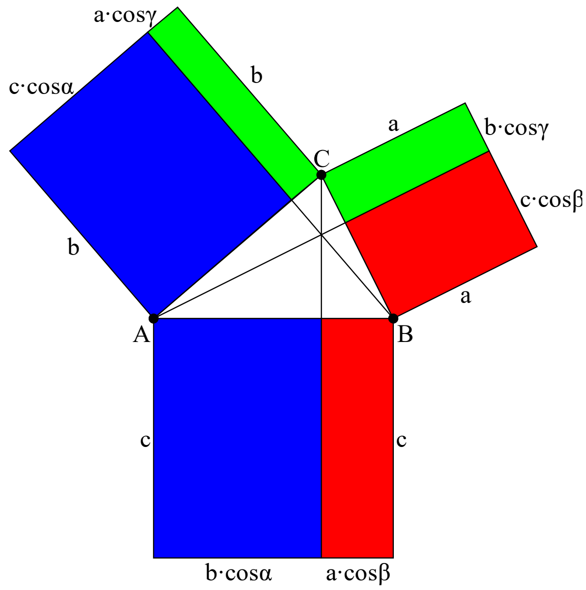
Jörg MEYER, Hameln
Letzte Änderung 24.9.2023

Ein anschaulicher Beweis zum Cosinussatz

1. Warum unterrichtet man den Cosinussatz?

Lernende erfahren, dass man das, was man konstruieren kann, auch berechnen kann, und dass man das, was man nicht oder nicht eindeutig konstruieren kann, auch nicht oder nicht eindeutig berechnen kann. Dies bereitet den Gedankengang der analytischen Geometrie in der Sek II vor.

2. Ein anschaulicher Beweis für spitzwinklige Dreiecke



Verlängert man die Höhen von ABC und errichtet über den Dreiecksseiten Quadrate[1], so haben gleichfarbige Rechtecke gleichen Flächeninhalt, also gilt

$$c^2 = \text{blau} + \text{rot}$$
$$a^2 = \text{rot} + \text{grün}$$
$$b^2 = \text{blau} + \text{grün}$$

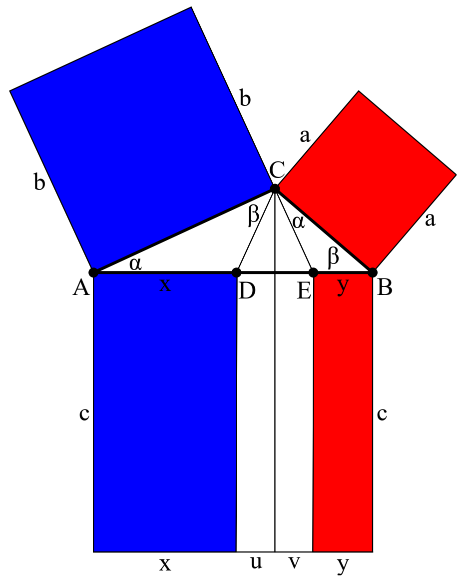
und daher

$$c^2 = \left(a^2 - \text{grün}\right) + \left(b^2 - \text{grün}\right)$$
$$= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

mit analogen Beziehungen für a^2 und b^2.

3. Ein anschaulicher Beweis für stumpfwinklige Dreiecke

Für $\gamma > 90°$ ist $\alpha + \beta < \gamma$. Man konstruiere D und E wie in der folgenden Graphik.



Im Dreieck ADC ist $\frac{x}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\gamma}$, also $x = \frac{b^2}{c}$. Die beiden blauen Rechtecke sind daher flächengleich.

Im Dreieck EBC ist $\frac{y}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\gamma}$, also $y = \frac{a^2}{c}$, und auch die beiden oten Rechtecke sind somit flächengleich.

Im linken Teildreieck von DEC ist $\cos\left(180° - \gamma\right) = \frac{u}{DC}$, was mit $\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\beta}$ bzw. $DC = \frac{a}{b} \cdot x = \frac{a \cdot b}{c}$ zu $u = \frac{a \cdot b}{c} \cdot \cos\left(180° - \gamma\right)$ führt. Für v erhält man dasselbe Resultat. Dann ist

$$c^2 = \text{blau} + \text{weiß} + \text{rot} = b^2 + \left(u + v\right) \cdot c + a^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\left(180° - \gamma\right).$$

---

[1] Haag, Wilfried (2003). Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart usw.: Klett Verlag.