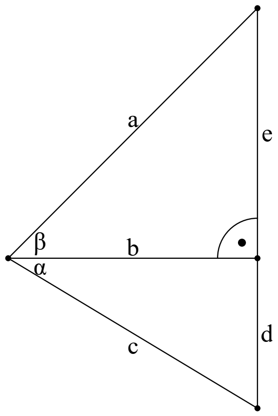
Jörg MEYER, Hameln

Additionstheoreme in der Sek I

Die *Additionstheoreme*[1] sieht man für $0° < \alpha + \beta < 90°$ so ein:



Das große Dreieck hat den Flächenhalt

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{b \cdot e}{2} + \frac{b \cdot d}{2},$$

also ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{b}{c} \cdot \frac{e}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha$$

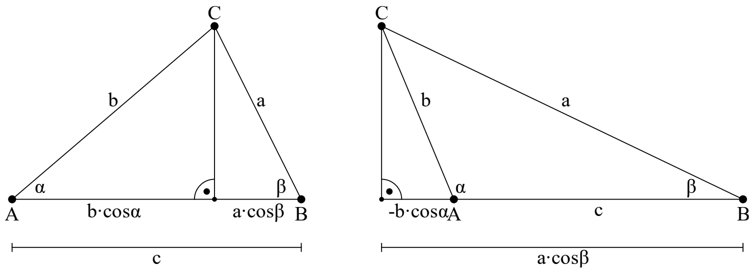
und

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin((90° - \alpha) - \beta) \\ &= \cos(90° - \alpha) \cdot \sin(-\beta) + \cos(-\beta) \cdot \sin(90° - \alpha) \\ &= -\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Alernativ kann man auch folgendermaßen vorgehen:
Es gilt der Projektionssatz

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$$

(Man beachte, dass im Bild ganz rechts $\cos\alpha < 0$ ist!)



Daher ist aufgrund des Sinussatzes $\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$, und wegen $\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$ hat man das Additionstheorem für den Sinus.

[1] Pargeter in Math. Gaz. Vol. 80, No. 487 (Mar. 1996), pp. 235-236.